

4.3 对数

在 4.2.1 的问题 1 中, 通过指数幂运算, 我们能从 $y=1.11^x$ 中求出经过 x 年后 B 地景区的游客人次为 2001 年的倍数 y . 反之, 如果要求经过多少年游客人次是 2001 年的 2 倍, 3 倍, 4 倍, \dots , 那么该如何解决?

4.3.1 对数的概念

上述问题实际上就是从 $2=1.11^x$, $3=1.11^x$, $4=1.11^x$, \dots 中分别求出 x , 即已知底数和幂的值, 求指数. 这是本节要学习的对数.

一般地, 如果 $a^x=N$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$), 那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数 (logarithm), 记作

$$x=\log_a N,$$

其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数.

例如, 由于 $2=1.11^x$, 所以 x 就是以 1.11 为底 2 的对数, 记作 $x=\log_{1.11} 2$; 再如, 由于 $4^2=16$, 所以以 4 为底 16 的对数是 2, 记作 $\log_4 16=2$.

通常, 我们将以 10 为底的对数叫做常用对数 (common logarithm), 并把 $\log_{10} N$ 记为 $\lg N$. 另外, 在科技、经济以及社会生活中经常使用以无理数 $e=2.718\ 28\dots$ 为底数的对数, 以 e 为底的对数称为自然对数 (natural logarithm), 并把 $\log_e N$ 记为 $\ln N$.

根据对数的定义, 可以得到对数与指数间的关系:

当 $a>0$, $a\neq 1$ 时, $a^x=N\iff x=\log_a N$.

由指数与对数的这个关系, 可以得到关于对数的如下结论:

负数和 0 没有对数;

$$\log_a 1=0, \log_a a=1.$$

请你利用对数与指数间的关系证明这两个结论.

例 1 把下列指数式化为对数式, 对数式化为指数式:

$$(1) 5^4=625; \quad (2) 2^{-6}=\frac{1}{64}; \quad (3) \left(\frac{1}{3}\right)^m=5.73;$$

“log” 是 logarithm
(对数) 的缩写.

通过查询互联网, 进一步了解无理数 e 、常用对数和自然对数.

$$(4) \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4; \quad (5) \lg 0.01 = -2; \quad (6) \ln 10 = n.$$

解: (1) $\log_5 625 = 4$; (2) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$; (3) $\log_{\frac{1}{3}} 5.73 = m$;

$$(4) \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16; \quad (5) 10^{-2} = 0.01; \quad (6) e^n = 10.$$

例2 求下列各式中 x 的值:

$$(1) \log_{64} x = -\frac{2}{3}; \quad (2) \log_x 8 = 6;$$

$$(3) \lg 100 = x; \quad (4) -\ln e^2 = x.$$

解: (1) 因为 $\log_{64} x = -\frac{2}{3}$, 所以

$$x = 64^{-\frac{2}{3}} = (4^3)^{-\frac{2}{3}} = 4^{-2} = \frac{1}{16}.$$

(2) 因为 $\log_x 8 = 6$, 所以 $x^6 = 8$. 又 $x > 0$, 所以

$$x = 8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

(3) 因为 $\lg 100 = x$, 所以

$$10^x = 100, \quad 10^x = 10^2,$$

于是

$$x = 2.$$

(4) 因为 $-\ln e^2 = x$, 所以

$$\ln e^2 = -x, \quad e^2 = e^{-x},$$

于是

$$x = -2.$$

练习

1. 把下列指数式写成对数式, 对数式写成指数式:

$$(1) 2^3 = 8; \quad (2) e^{\sqrt{3}} = m; \quad (3) 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3};$$

$$(4) \log_3 9 = 2; \quad (5) \lg n = 2.3; \quad (6) \log_3 \frac{1}{81} = -4.$$

2. 求下列各式的值:

$$(1) \log_5 25; \quad (2) \log_{0.4} 1; \quad (3) \ln \frac{1}{e}; \quad (4) \lg 0.001.$$

3. 求下列各式中 x 的值:

$$(1) \log_{\frac{1}{3}} x = -3; \quad (2) \log_x 49 = 4; \quad (3) \lg 0.000\,01 = x; \quad (4) \ln \sqrt{e} = -x.$$