

3.2 函数的基本性质

变化中的不变性就是性质，变化中的规律性也是性质。

前面学习了函数的定义和表示法，知道函数 $y=f(x)$ ($x \in A$) 描述了客观世界中变量之间的一种对应关系。这样，我们就可以通过研究函数的变化规律来把握客观世界中事物的变化规律。因此，研究函数的性质，如随着自变量的增大函数值是增大还是减小，有没有最大值或最小值，函数图象有什么特征等，是认识客观规律的重要方法。

我们知道，先画出函数图象，通过观察和分析图象的特征，可以得到函数的一些性质。观察图 3.2-1 中的各个函数图象，你能说说它们分别反映了相应函数的哪些性质吗？

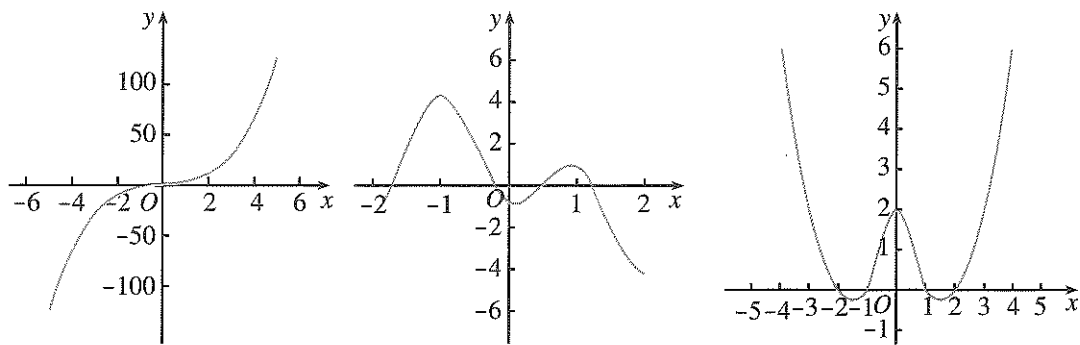


图 3.2-1

3.2.1 单调性

在初中，我们利用函数图象研究过函数值随自变量的增大而增大（或减小）的性质，这一性质叫做函数的单调性。下面进一步用符号语言刻画这种性质。

先研究二次函数 $f(x)=x^2$ 的单调性。

画出它的图象（如图 3.2-2），可以看到：

图象在 y 轴左侧部分从左到右是下降的，也就是说，当 $x \leq 0$ 时， y 随 x 的增大而减小。用符号语言描述，就是任意取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ ，得到 $f(x_1)=x_1^2$ ， $f(x_2)=x_2^2$ ，那么当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$ 。这时我们就说函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调递减的。

图象在 y 轴右侧部分从左到右是上升的，也就是说，当

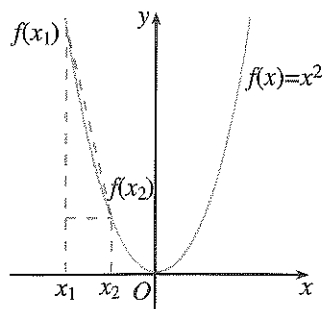


图 3.2-2

你能说明为什么 $f(x_1) > f(x_2)$ 吗？

$x \geq 0$ 时, y 随 x 的增大而增大. 用符号语言表达, 就是任意取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 得到 $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2$, 那么当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$. 这时我们就说函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调递增的.

你能说明为什么 $f(x_1) < f(x_2)$ 吗?

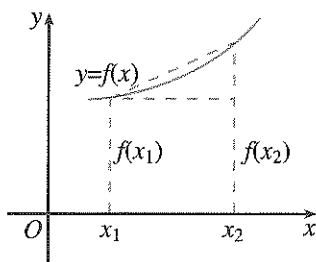
思考

函数 $f(x) = |x|$, $f(x) = -x^2$ 各有怎样的单调性?

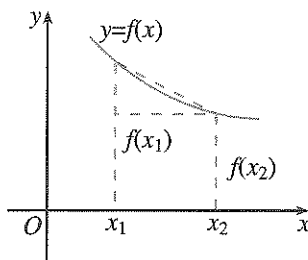
一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$:

如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增 (图 3.2-3 (1)).

特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时, 我们就称它是增函数 (increasing function).



(1)



(2)

图 3.2-3

如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减 (图 3.2-3 (2)).

特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时, 我们就称它是减函数 (decreasing function).

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减, 那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有 (严格的) 单调性, 区间 I 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间.

思考

(1) 设 A 是区间 I 上某些自变量的值组成的集合, 而且 $\forall x_1, x_2 \in A$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 我们能说函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增吗? 你能举例说明吗?

(2) 函数的单调性是对定义域内某个区间而言的, 你能举出在整个定义域内是单调递增的函数例子吗? 你能举出在定义域内的某些区间上单调递增但在另一些区间上单调递减的函数例子吗?

例1 根据定义,研究函数 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$ 的单调性.

分析: 根据函数单调性的定义,需要考察当 $x_1<x_2$ 时, $f(x_1)<f(x_2)$ 还是 $f(x_1)>f(x_2)$. 根据实数大小关系的基本事实,只要考察 $f(x_1)-f(x_2)$ 与 0 的大小关系.

解: 函数 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$ 的定义域是 \mathbf{R} . $\forall x_1, x_2\in\mathbf{R}$, 且 $x_1<x_2$, 则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2) &= (kx_1+b)-(kx_2+b) \\ &= k(x_1-x_2).\end{aligned}$$

由 $x_1<x_2$, 得 $x_1-x_2<0$. 所以

①当 $k>0$ 时, $k(x_1-x_2)<0$. 于是

$$f(x_1)-f(x_2)<0,$$

即

$$f(x_1)<f(x_2).$$

这时, $f(x)=kx+b$ 是增函数.

②当 $k<0$ 时, $k(x_1-x_2)>0$. 于是

$$f(x_1)-f(x_2)>0,$$

即

$$f(x_1)>f(x_2).$$

这时, $f(x)=kx+b$ 是减函数.

在初中,我们利用函数图象得到了上述结论,这里用严格的推理运算得到了函数 $f(x)=kx+b$ 的单调性.

例2 物理学中的玻意耳定律 $p=\frac{k}{V}$ (k 为正常数) 告诉我们,对于一定质量的气体,当其温度不变时,体积 V 减小,压强 p 将增大. 试对此用函数的单调性证明.

分析: 根据题意,只要证明函数 $p=\frac{k}{V}$ ($V\in(0, +\infty)$) 是减函数即可.

证明: $\forall V_1, V_2\in(0, +\infty)$, 且 $V_1<V_2$, 则

$$p_1-p_2=\frac{k}{V_1}-\frac{k}{V_2}=k\frac{V_2-V_1}{V_1V_2}.$$

由 $V_1, V_2\in(0, +\infty)$, 得 $V_1V_2>0$;

由 $V_1<V_2$, 得 $V_2-V_1>0$.

又 $k>0$, 于是

$$p_1-p_2>0,$$

即

$$p_1>p_2.$$

所以, 根据函数单调性的定义, 函数 $p=\frac{k}{V}$, $V\in(0, +\infty)$ 是减函数. 也就是说, 当体积 V 减小时, 压强 p 将增大.

例3 根据定义证明函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

证明: $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \\ &= (x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} (x_1 x_2 - 1). \end{aligned}$$

由 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 得 $x_1 > 1, x_2 > 1$.

所以 $x_1 x_2 > 1, x_1 x_2 - 1 > 0$.

又由 $x_1 < x_2$, 得 $x_1 - x_2 < 0$.

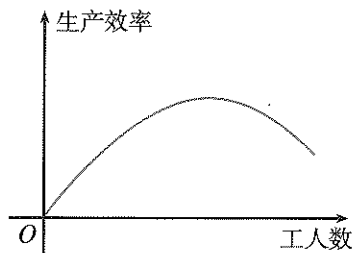
于是 $\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} (x_1 x_2 - 1) < 0$,

即 $y_1 < y_2$.

所以, 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

练习

1. 请根据下图描述某装配线的生产效率与生产线上工人数量间的关系.



(第1题)

2. 根据定义证明函数 $f(x)=3x+2$ 是增函数.
3. 证明函数 $f(x)=-\frac{2}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.
4. 画出反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象.

(1) 这个函数的定义域 D 是什么?

(2) 它在定义域 D 上的单调性是怎样的? 证明你的结论.

通过观察图象, 先对函数是否具有某种性质做出猜想, 然后通过逻辑推理, 证明这种猜想的正确性, 是研究函数性质的一种常用方法.